Conclusion : $f^{-1}(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in [0,+\infty[$

5) • posons u(x) = sin x

$x \to \sin x = U(x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

U($\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) = $]0,1[$

$x \to f(x)$ est dérivable sur U($\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$) = $]0,1[$

Donc g(x) est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

• $g'(x) = (f \circ U(x))' = U'(x) \cdot f'(U(x))$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\frac{\sin x}{1-\sin x}}}$$

Donc $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{g'(x)=\frac{\cos x}{2(1-\sin x)^2\sqrt{\frac{\sin x}{1-\sin x}}}}$

Exercice n° 19

● f est dérivable sur]0 , 2[et $f'(x)=\frac{(\frac{x^3}{2-x})'}{2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\frac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}=\frac{6x^2-3x^3+x^3}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^2(3-x)}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}}$$

Or $x \in [0,2[$ donc $(3-x)>0$ d'où $f'(x)>0$

x	0		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{2-x}=\frac{8}{\underbrace{0^+}_{2-x>0}}=+\infty$$

●

f est continue et strictement croissante sur [0 , 2 [

Donc f réalise une bijection de [0,2[sur L'intervalle

$J=\left[f(0),\lim_{x\to 2} f(x)\right[=[0,+\infty[$ D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

Exercice n° 20

● la fonction $x \to \cos x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : cosx > 0 donc f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

● On a $f'(x)=-\frac{(\sqrt{\cos x})'}{\sqrt{\cos x}^2}=-\frac{\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$

$$f'(x)=-\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\frac{\sin x}{2\cos x\sqrt{\cos x}}$$

Comme pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a cosx > 0 et sinx > 0

On aura $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)>0$

* f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

D'où f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

Car $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[$ et on a

$f(0)=1$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

● a) $f^{-1}(1)=0$ et $f'(0)=0$ donc f^{-1} non dérivable à droite en 1

b)* f est dérivable, $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]1,+\infty[$

$$*(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(x)]}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sin(f^{-1}(x))}{2\cos(f^{-1}(x)).\sqrt{\cos(f^{-1}(x)}}} \quad (1)$$

Or $fof^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos(f^{-1}(x))}}=x \Rightarrow \cos(f^{-1}(x)=\frac{1}{x^2}$

Aussi on a :

$$\sin(f^{-1}(x))=\sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))}=\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-x^4}{x^4}}=\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{x^4}}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

Donc $\forall x \in]1,+\infty[$ on a : $\sin(f^{-1}(x))=\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$

Remplacent maintenant $\cos(f^{-1}(x)$ et $\sin(f^{-1}(x)$ par

Leurs expressions en fonction de x dans l'égalité (1) :

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn